הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל - הפקולטה למתמטיקה

חדו"א 2מ – 104022

מבחן סוף סמסטר מועד ב', אביב - 20.09.19

משך הבחינה שלוש שעות.
אין להשתמש בחומר עזר או באמצעי עזר מכל סוג שהוא, כולל מחשבון.
לבחינה שני חלקים: בחלק א' שאלות רב־ברירה ("אמריקאיות") ובחלק ב' שאלות "פתוחות". עבור כל אחת מהשאלות בחלק א' יש להקיף בעיגול את התשובה היחידה הנכונה. על השאלות בחלק ב' יש לענות באופן מלא בגוף השאלון במקום המיועד לכך.
אין לפרק את השאלון ויש להחזירו בשלמותו בתום הבחינה.

בהצלחה!

חלק א'

לכל אחת מן השאלות בחלק זה יש לבחור את התשובה הנכונה היחידה מבין האפשרויות הרשומות. יש להקיף בעיגול את התשובה הנכונה. סימון לא ברור, או סימון של יותר מתשובה אחת באותה שאלה, יפסול את תשובתך. משקל כל שאלה בחלק זה הוא 7 נקודות.

1. נתונים $\overline{a},\overline{b},\overline{c}\in\mathbb{R}^3$ ונגדיר $\overline{d}=(2\overline{a}+3\overline{b}+\overline{c})\times(5\overline{a}+3\overline{b}+2\overline{c})$.
מהו נפח המקבילון הנוצר ע"י $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ אם ידוע כי $\overline{d}\cdot\overline{a}=12$?

(א) 3
(ב) 1
(ג) 5
(ד) 2
(ה) 4***

2. האינטגרל

$$\iint\limits_D xe^{y^2}dxdy$$

כאשר

$$D=\{(x,y)|\ 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le 1\}$$

שווה ל־

(א) $\frac{e-2}{3}$
(ב) $\frac{e^2-1}{3}$
(ג) $\frac{e^2-1}{4}$
(ד) $\frac{e-2}{2}$
(ה) $\frac{e-1}{4}$***

3. יהי L עקום החיתוך בין המשטחים

$$x^2yz+xy^2z+xyz^2=3,\quad 3x^3-y^3+z^3=3.$$

כיוון המקביל לישר המשיק לעקום זה בנקודה $(1,1,1)$ הוא

(א) $(1,2,7)$
(ב) $(2,2,-4)$***
(ג) $(1,2,-3)$
(ד) $(1,1,-1)$
(ה) $(3,6,7)$

4. מטייל עומד בנקודה $(2,1,0)$ על הר שצורתו $3x^2y^3+2x^3y^2\sin(z)+xyz^3=12$. הוא מחליט להתחיל לרדת בדרך הכי מהירה למטה. לאיזה כיוון במרחב עליו לפנות בתחילת תנועתו?

(א) $(3,6,-10)$
(ב) $(-\frac{1}{3},-\frac{2}{9},-8)$
(ג) $(1,1,-3)$
(ד) $(6,18,-45)$***
(ה) $(2,6,-15)$

5. המסה של הגוף

$$V = \{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2 \le 2,\ \ z \ge 0,\ \ x^2+y^2 \ge 1\}$$

כאשר צפיפות המסה היא $\rho(x,y,z) = z$ היא

(א) 2π

(ב) $\frac{\pi}{4}$***

(ג) $\frac{\pi}{5}$

(ד) π

(ה) $\frac{\pi}{3}$

6. אורך העקום

$$\overline{r}(t) = \left(\int_1^t \frac{\cos w}{w} dw, \int_1^t \frac{\sin w}{w} dw \right) \quad 2 \le t \le 4$$

הוא

(א) $\ln \frac{5}{2}$

(ב) $\ln 2$***

(ג) $\ln 4$

(ד) $e^4 - e^2$

(ה) e

7. מסת המשטח

$$S = \{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2 = 1,\ \ z \ge \sqrt{x^2+y^2}\}$$

כאשר צפיפות המסה היא $\rho(x,y,z) = z$, היא

(א) 2π

(ב) π

(ג) $\frac{1}{2}$

(ד) $\frac{\pi}{2}$***

(ה) 1

חלק ב'

יש לרשום בעמודים הבאים פתרון מלא ומנומק לשתי השאלות הבאות.

8. (25 נקודות)
אין קשר בין הסעיפים.

(א) (5 נקודות)
תהי $f(x,y)$ פונקציה גזירה פעמיים ברציפות ותהי (x_0,y_0) נקודה קריטית שבה

$$\det\begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{xy}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0)\end{pmatrix} > 0$$

הוכיחו כי $f''_{xx}(x_0,y_0), f''_{yy}(x_0,y_0)$ שונים מאפס, ויש להם את אותו הסימן.

(ב) (10 נקודות)
מיינו את הנקודות הקריטיות של $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-y}$.

(ג) (10 נקודות)
הוכיחו כי לפונקציה $f(x,y)=xy$ יש מינימום ומקסימום (מוחלטים) בתחום $D=\{(x,y)|\ x^2+2y^2\le 4\}$ ומיצאו את הערך המינימלי והמקסימלי ואת הנקודות בהן ערכים אלו מתקבלים.

פתרון:

(א) נתון כי

$$0<\det\begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{xy}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0)\end{pmatrix} = f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot f''_{yy}(x_0,y_0) - f''_{xy}(x_0,y_0)^2$$

ולכן

$$f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot f''_{yy}(x_0,y_0) > f''_{xy}(x_0,y_0)^2 \ge 0$$

ולכן $f''_{xx}(x_0,y_0), f''_{yy}(x_0,y_0)$ שונים מאפס, ויש להם את אותו הסימן.

(ב) כיוון ש־ $f(x,y)$ גזירה ברציפות אז הנקודות הקריטיות הן כאלו עבורן הגרדיאנט מתאפס.

$$f'_x(x,y)=2xe^{-y}$$
$$f'_y(x,y)=2ye^{-y}-(x^2+y^2)e^{-y}=(2y-x^2-y^2)e^{-y}$$

ולכן הגרדיאנט מתאפס כאשר $x=0$ וכאשר $2y-y^2=y(2-y)=0$, כלומר $(0,0),(0,2)$. נמיין:
כיוון שהפונקציה גזירה פעמיים ברציפות נשתמש בהסיאן

$$f''_{xx}(x,y)=2e^{-y},\ \ f''_{xy}(x,y)=-2xe^{-y},\ \ f''_{yy}(x,y)=(2-4y+x^2+y^2)e^{-y}$$

ולכן

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 2e^{-y} & -2xe^{-y} \\ -2xe^{-y} & (2-4y+x^2+y^2)e^{-y}\end{pmatrix}.$$

עבור $(0,0)$

$$\det H_f(x,y)=\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix}=4>0 \quad f''_{xx}(0,0)=2>0$$

ולכן $(0,0)$ היא מינימום מקומי.
עבור $(0,2)$

$$\det H_f(x,y)=\det\begin{pmatrix} 2e^{-2} & 0 \\ 0 & -2e^{-2}\end{pmatrix}=-4e^{-4}<0$$

ולכן $(0,2)$ היא נקודת אוכף.

(ג) $f(x,y)=xy$ היא רציפה כי היא פולינום, ו־ D הוא תחום חסום וסגור (אליפסה) ולכן לפי וויארשטראס, יש לפונקציה מינימום ומקסימום ב־ D.
כיוון ש־ f פולינום אז היא גזירה ברציפות ולכן נקודות קיצון בפנים של התחום הן נקודות בהן הגרדיאנט מתאפס.

$$\overline{\nabla} f(x,y)=(y,x)=(0,0) \iff x=y=0$$

ולכן $(0,0)$ נקודה חשודה לקיצון.
נחפש חשודים לקיצון על השפה שהיא

$$\{(x,y)|\ x^2+2y^2=4\}.$$

נסתכל על $g(x,y)=x^2+2y^2-4$.
f,g גזירות ברציפות במישור כיוון שהן פולינומים, ובנוסף

$$\overline{\nabla} g(x,y)=(2x,4y)=(0,0) \iff (x,y)=(0,0)$$

ו־ $(0,0)$ אינה מקיימת את האילוץ. לכן נוכל להשתמש בכופלי לגרנג'.

$$\begin{aligned} y+2\lambda x&=0\\ x+4\lambda y&=0\\ x^2+2y^2&=4 \end{aligned}$$

שנותן

$$\begin{aligned} x(1-8\lambda^2)&=0\\ y(1-8\lambda^2)&=0\\ x^2+2y^2&=4 \end{aligned}$$

ואם $1-8\lambda^2\neq 0$ אז $x=y=0$ שאינו מקיים את האילוץ, ואם $1-8\lambda^2=0$ אז $\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{8}}=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ולכן מזה ש־ $y=-2\lambda x$, נציב לתוך האילוץ ונקבל את הנקודות $(\sqrt{2},1),(-\sqrt{2},1),(\sqrt{2},-1),(-\sqrt{2},-1)$.
לסיכום הנקודות החשודות לקיצון הן

$$(0,0),(\sqrt{2},1),(-\sqrt{2},1),(\sqrt{2},-1),(-\sqrt{2},-1)$$

נציב ונקבל

$$f(0,0)=0,\ \ f(\sqrt{2},1)=f(-\sqrt{2},-1)=\sqrt{2},\ \ f(-\sqrt{2},1)=f(\sqrt{2},-1)=-\sqrt{2}$$

ולכן הערך המינימלי הוא $-\sqrt{2}$ והוא מתקבל בנקודות $(-\sqrt{2},1),(\sqrt{2},-1)$ והערך המקסימלי הוא $\sqrt{2}$ והוא מתקבל בנקודות $(\sqrt{2},1),(-\sqrt{2},-1)$.

9. (26 נקודות)
אין קשר בין הסעיפים.

(א) (16 נקודות)
נתון השדה
$$\overline{F}(x,y,z)=\left(3x^2y,x^3+2y-z^2,-6xyz\right)$$
והמשטח
$$S=\{(x,y,z)|\ z=25-9x^2-9y^2,\ 0\le z\le 9\}$$
עם אוריינטציה בה לנורמל רכיב z חיובי. חשבו את
$$\iint\limits_S \overline{F}\cdot\hat{n}dS$$
בסעיף זה, בתשובה הסופית, אפשר להשאיר בפתרון מספרים עם חזקות.

(ב) (10 נקודות)
נתון השדה
$$\overline{F}(x,y,z)=\left(yz-y,xz,xy+y-x-1\right)$$
ויהי $\Pi:\ Ax+By+Cz+D=0$ מישור עבורו $A+B+C=0$. לבסוף, יהי L עקום חלק ופשוט וסגור המוכל במישור Π.
הראו כי
$$\oint\limits_L \overline{F}\cdot d\overline{r}=0$$

פתרון:

(א) נסגור את המשטח בעזרת שני המשטחים
$$S_1=\{(x,y,z)|\ x^2+y^2\le\frac{25}{9},\ z=0\}\quad S_2=\{(x,y,z)|\ x^2+y^2\le\frac{16}{9},\ z=9\}$$
כאשר ל־ S_1 ניתן אוריינטציה למטה ול־ S_2 ניתן אוריינטציה למעלה. אז $S\cup S_1\cup S_2$ היא השפה עם האוריינטציה החיובית של הגוף
$$V=\{(x,y,z)|\ \frac{16}{9}\le x^2+y^2\le\frac{25}{9},\ 0\le z\le 25-9x^2-9y^2\}\cup\{(x,y,z)|\ x^2+y^2\le\frac{16}{9},0\le z\le 9\}$$
וכיוון שהשדה הווקטורי הוא גזיר ברציפות בכל המרחב עי פונקציות הקואורדינטות הן פולינומים, ומכיוון ששפת הגוף V חלקה למקוטעין, נוכל להשתמש בגאוס ולקבל
$$\iint\limits_{\partial V=S\cup S_1\cup S_2}\overline{F}\cdot\hat{n}dS=\iiint\limits_V div(\overline{F})dxdydz.$$
אז
$$\iint\limits_S\overline{F}\cdot\hat{n}dS+\iint\limits_{S_1}\overline{F}\cdot\hat{n}dS+\iint\limits_{S_2}\overline{F}\cdot\hat{n}dS=\iiint\limits_V 6xy+2-6xy\ dxdydz=2\iiint\limits_V 1dxdydz.$$
פרמטריזציה עבור S_1 היא $x^2+y^2\le\frac{25}{9}\quad \overline{r}(x,y)=(x,y,0)$ ועבורה $\overline{r}'_x\times\overline{r}'_y=(0,0,1)$ שזו האוריינטציה ההפוכה ולכן
$$\iint\limits_{S_1}\overline{F}\cdot\hat{n}dS=-\iint\limits_{x^2+y^2\le\frac{25}{9}}(?,?,0)\cdot(0,0,1)dxdy=0.$$

פרמטריזציה עבור S_2 היא $x^2+y^2 \le \frac{16}{9}$ $\quad \overline{r}(x,y)=(x,y,9)$ ועבורה $\overline{r}'_x \times \overline{r}'_y = (0,0,1)$
שזו האוריינטציה הנכונה ולכן

$$\iint\limits_{S_2} \overline{F}\cdot \hat{n}dS = \iint\limits_{x^2+y^2\le\frac{16}{9}} (?,?,-54xy)\cdot(0,0,1)dxdy = -54\int\limits_0^{\frac{4}{3}}\left(\int_0^{2\pi} r^3\cos\theta\sin\theta d\theta\right)dr =$$

$$= -54\int\limits_0^{\frac{4}{3}} r^3dr\cdot\int\limits_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta d\theta = -27\int\limits_0^{\frac{4}{3}} r^3dr\cdot\sin^2\theta\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

ולבסוף

$$\iint\limits_{S} \overline{F}\cdot \hat{n}dS = 2\iiint\limits_{V} 1dxdydz = 2\iint\limits_{\frac{16}{9}\le x^2+y^2\le\frac{25}{9}}\left(\int\limits_0^{25-9x^2-9y^2} 1dz\right)dxdy +$$

$$+\ 2\iint_{x^2+y^2\le\frac{16}{9}}\left(\int\limits_0^{9} 1dz\right)dxdy = 2\iint\limits_{\frac{16}{9}\le x^2+y^2\le\frac{25}{9}} 25-9x^2-9y^2dxdy + 2\cdot 9\cdot\pi\cdot\frac{16}{9} =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}}(25-9r^2)rdr\right)d\theta + 32\pi = 4\pi\left(\frac{25}{2}r^2-\frac{9}{4}r^4\Big|_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}}\right)+32\pi =$$

$$= \pi\left(50\cdot\frac{25}{9}-9\frac{5^4}{3^4}-50\cdot\frac{16}{9}+9\frac{4^4}{3^4}\right)+32\pi = 41\pi$$

(ב) כיוון ש־ L עקום חלק פשוט וסגור אז הוא חוסם משטח המוכל במישור ונסמנו S. ניתן ל־ S אוריינטציה המתאימה לאוריינטציה של L. אז נורמל עבור S הוא $\overline{n}=\pm(A,B,C)$.
לכן $\hat{n}=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(A,B,C)$ ולכן, לפי סטוקס, כיוון ש־ $\overline{\nabla}\times\overline{F}=(1,1,1)$, אז

$$\oint\limits_L \overline{F}\cdot d\overline{r} = \iint\limits_S(\overline{\nabla}\times\overline{F})\cdot\hat{n}dS = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\iint\limits_S(1,1,1)\cdot(A,B,C)dS =$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\iint\limits_S A+B+CdS = 0$$